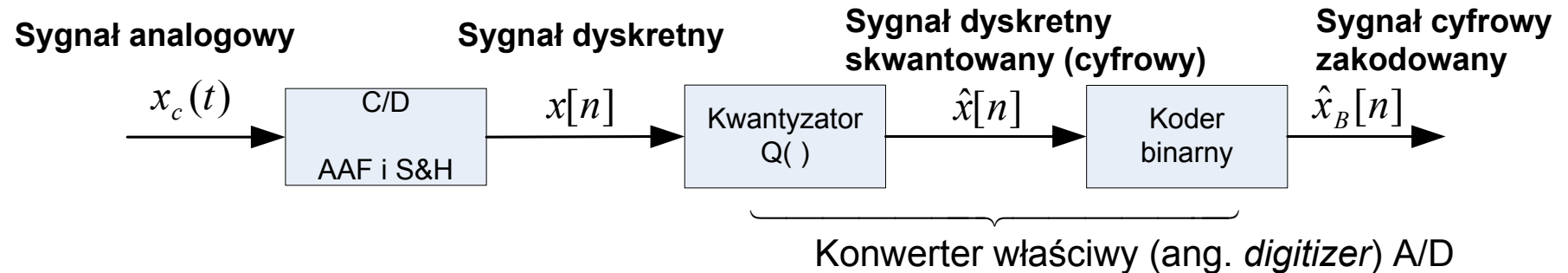


KWANTYZACJA

Koncepcyjna reprezentacja systemu konwersji analogowo-cyfrowej



Idealny konwerter C/D reprezentuje tu próbkowanie realizowane przez „sample and hold”.

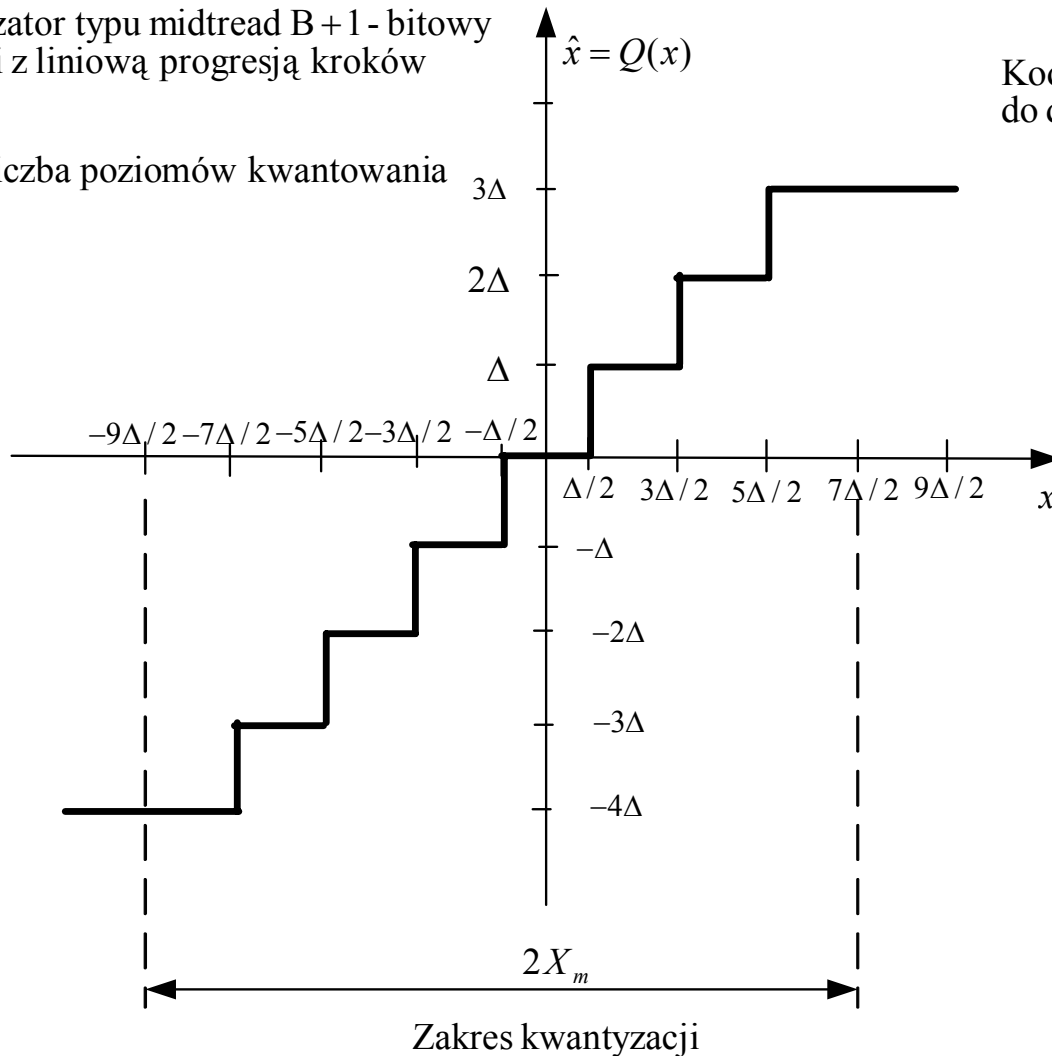
Kwantyzator – system nieliniowy transformujący próbkę wejściową $x[n]$ w próbkę $\hat{x}[n]$ należącą do skończonego zbioru ściśle określonych wartości. Operację otrzymywania skwantowanej próbki zapisujemy $\hat{x}[n] = Q(x[n])$.

Charakterystyka kwantyzatora 3-bitowego

Typowy kwantyzator bipolarny do konwersji A/D

kwantyzator typu midtread $B+1$ - bitowy
z $B = 2$ i z liniową progresją kroków

2^{B+1} - liczba poziomów kwantowania



Kod z uzupełnieniem
do dwóch

\hat{x}_B

Kod offsetowy binarny

011	111
010	110
001	101
000	100
111	011
110	010
101	001
100	000

Jest to kwantyzator bipolarny (dla sygnałów o wartościach próbek dodatnich i ujemnych) z parzystą liczbą poziomów kwantowania (tu $2^3 = 8$).

Kod offsetowy binarny (ang. *offset binary code*) – łatwy do napisania. Symbole są przypisywane w kolejności numerycznej rozpoczynając od najmniej znaczącego poziomu kwantowania.

Kod z uzupełnieniem do dwóch (ang. *two's complement code*) – operuje nim większość komputerów i mikroprocesorów. Najbardziej na lewo położony bit (MSB – ang. *most significant bit*) jest bitem znaku, a pozostałe bity reprezentują liczby całkowite lub ułamki. Ten kod otrzymujemy z kodu offsetowego binarnego przez zamianę bitu MSB z 0 na 1 i odwrotnie.

Związek numeryczny słów kodowych i wartości próbek skwantowanych

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n]$$

gdzie zakładamy liczby binarne takie, że

$$-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$$

$$\Delta \triangleq \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}; \text{kwantyzator bipolarny}; x \in < -X_m, X_m >$$

B – liczba bitów w $B+1$ – bitowym słowie, inaczej - **rozdzielczość** konwertera (ang. *resolution*). 2^{B+1} – liczba poziomów kwantowania.

Ogólnie, $(B+1)$ – bitowy ułamek binarny w kodzie (arytmetyce) z uzupełnieniem do dwóch ma postać

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_B$$

i wartość liczbowa

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}$$

Przykładowo

$$B = 2, \quad B + 1 = 3$$

$$a_0 a_1 a_2 = 1 0 1$$

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} = -2^0 + 2^{-2} = -\frac{3}{4}$$

Symbol binarny $a_0 a_1 a_2$	Wartość liczbowa \hat{x}_B
0 1 1	3/4
0 1 0	1/2
0 0 1	1/4
0 0 0	0
1 1 1	-1/4
1 1 0	-1/2
1 0 1	-3/4
1 0 0	-1

ANALIZA BŁĘDÓW KWANTOWANIA

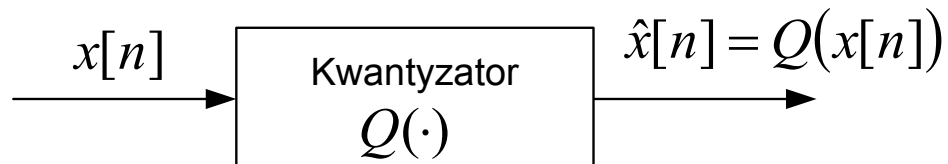
Błąd kwantowania $e[n] \triangleq \hat{x}[n] - x[n]$

Np. dla 3-bitowego kwantyzatora jeżeli $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$ to $\hat{x}[n] = \Delta$.

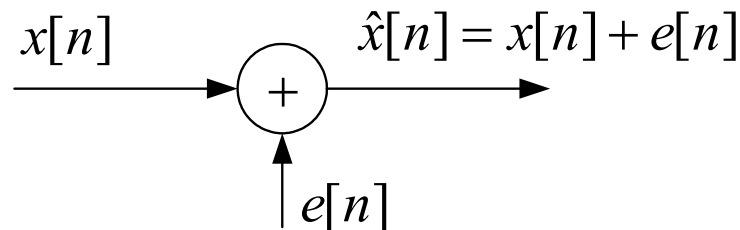
Stąd $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$ (*)

Ogólnie, dla $(B+1)$ – bitowego kwantyzatora z $\Delta = X_m / 2^B$, związek (*) jest spełniony, gdy

$$-X_m - \Delta/2 < x[n] \leq X_m - \Delta/2$$



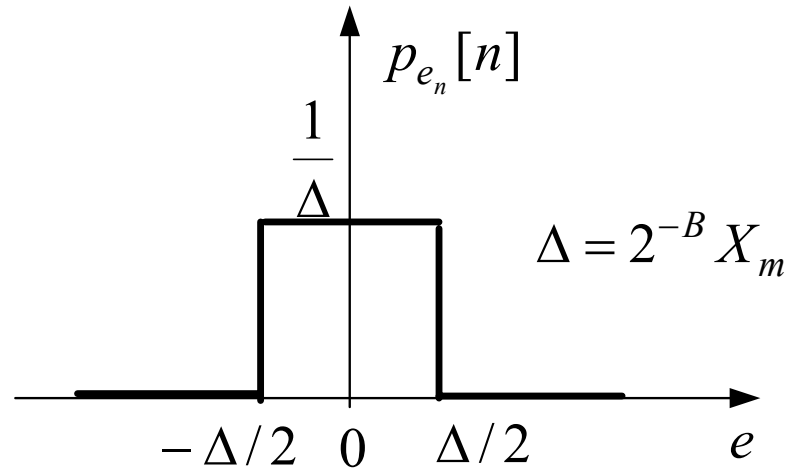
Addytywny model szumowy kwantyzatora



Założenia addytywnego, statystycznego modelu błędów kwantowania

1. Ciąg błędów $e[n]$ jest dyskretnym stacjonarnym procesem stochastycznym.
2. Ciąg błędów jest nieskorelowany z ciągiem $x[n]$.
3. Zmienne losowe procesu błędu są nieskorelowane, tzn. ciąg błędów jest szumem białym.
4. Rozkład prawdopodobieństwa $p_{e_n}[e]$ procesu błędu jest równomierny w zakresie błędu kwantowania.

Kwantyzator bipolarny
 $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$



Podsumowując: $e[n]$ to szum biały o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wartość średnia $e[n]$ równa się zero, a wariancja (moc szumu)

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{1}{\Delta} \frac{e^3}{3} \bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}, \quad \text{gdzie } \Delta = \frac{X_m}{2^B}$$

Dla $(B+1)$ – bitowego kwantyzatora z wykorzystaniem pełnego zakresu kwantowania X_m , moc szumu

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12} X_m^2$$

Miara degradacji (pogorszenia) sygnału przez szum addytywny, to stosunek mocy sygnału do mocy szumu SNR (od ang. *signal-to-noise ratio*) wyrażany w dB. Wynosi on dla $(B+1)$ – bitowego kwantyzatora bipolarnego

$$\text{SNR} \triangleq 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) = 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right)$$

gdzie σ_x^2 to moc sygnału przeznaczonego do kwantyzacji.

SNR rośnie o około 6 dB, gdy wydłużamy słowo kodowe o 1 bit, tzn., gdy podwajamy liczbę kroków kwantowania, tj. liczbę 2^{B+1} .

Ważny jest składnik

$$-20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

gdzie X_m – zwykle ustalone w systemie praktycznym (ang. *fixed*),

σ_x – pierwiastek z wartości średniokwadratowej amplitudy sygnału (ang. r.m.s. – *root mean square*).

Przykład. Kwantyzacja sinusoidy, a kwantyzacja sygnału mowy

$$x(t) = X_p \sin(2\pi F_0 t)$$

Przy pełnym wystereowaniu kwantyzatora: $X_p = X_m$, mamy $\sigma_x = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$ (wartość skuteczna (średniokwadratowa) sinusoidy), a wtedy dla słowa $(B+1)$ – bitowego

$$\text{SNR} = 6.02B + 7.8 \quad [\text{dB}]$$

$$\text{gdyż} \quad -20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) = -10\log_{10} 2 \cong -3.01 \quad [\text{dB}]$$

Przykładowo, dla $X_m = 10 \text{ V}$ i $B+1=16$, otrzymujemy

$$\text{SNR} = 6.02 \cdot 15 + 7.8 = 98.1 \quad [\text{dB}]$$

Natomiast dla sygnału o gaussowskim rozkładzie amplitud (mowa, muzyka)

$$\sigma_x = \frac{X_m}{4} \quad \text{i} \quad \text{SNR} \cong 6B - 1.25 \quad [\text{dB}]$$

Wtedy dla $B+1=16$ otrzymujemy $\text{SNR} \cong 6 \cdot 15 - 1.25 = 88.75 \quad [\text{dB}]$.

Przykład. W cyfrowym przetwarzaniu sygnałów akustycznych – dźwięku (ang. *digital audio*) sygnał próbkuje się z częstotliwością $F_p = 44.1 \text{ kHz}$ i kwantuje za pomocą kwantyzatora o pełnym zakresie $2X_m = 10 \text{ V}$. Określ liczbę bitów $B+1$ kwantyzatora bipolarnego taką, aby średniokwadratowy błąd kwantyzacji σ_e był mniejszy od $50 \mu\text{V}$. Oblicz przepływność bitową i zakres dynamiczny kwantyzatora.

Rozwiązanie. Mieliśmy wzór na moc (wariancję) błędu (szumu) kwantyzacji

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \text{ gdzie } \Delta = \frac{X_m}{2^B}$$

Wobec tego średniokwadratowy (r.m.s) błąd kwantyzacji wynosi

$$\sigma_e = \frac{X_m 2^{-B}}{\sqrt{12}}$$

Z tego wzoru obliczamy liczbę B

$$B = \log_2 \left(\frac{X_m}{\sqrt{12} \sigma_e} \right) = \log_2 \left(\frac{10/2}{\sqrt{12} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \right) = 14.82$$

przy czym $\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \cong \frac{\log_{10}(x)}{0.3010}$. Powyższy wynik zaokrąglamy do $B=15$.

Odpowiada to liczbie $2^{B+1} = 2^{16} = 65536$ poziomów kwantyzacji. Dla tej wartości B otrzymujemy

$$\sigma_e = \frac{X_m 2^{-B}}{\sqrt{12}} = \frac{(10/2) \cdot 2^{-15}}{\sqrt{12}} \cong 44 \mu\text{V}$$

Przepływność bitowa definiowana jako

$$(B+1)F_p$$

wynosi tu $(B+1)F_p = 16 \cdot 44.1 \cdot 10^3 = 705.6$ kbit/s. Jest to typowa wartość dla CD (ang. *compact disc*). Zakres dynamiczny (SNR) kwantyzatora sterowanego sygnałem gaussowskim wynosi około $6B - 1.25 = 6 \cdot 15 - 1.25 \cong 89$ [dB], a wysterowanego w pełni sinusoidą z $X_p = X_m$ wynosi: $\text{SNR} = 6.02B + 7.8 \cong 98$ [dB].

Zakres dynamiczny ucha ludzkiego wynosi około 100 dB. Tak więc szum kwantyzacji tego 16 – bitowego przetwornika jest bardzo blisko poziomu progu słyszalności. Z tego powodu aparatura akustyczna o jakości typowej dla CD wymaga co najmniej 16 – bitowego kwantowania.

Dla porównania, w przetwarzaniu sygnałów mowy, w telefonii, typowa częstotliwość próbkowania wynosi $F_p = 8$ kHz, a długość słowa kodowego wynosi $B+1=8$ bitów. Odpowiada to liczbie $2^{B+1} = 2^8 = 256$ poziomów kwantyzacji. 8 – bitowy przetwornik A/D z pełnym zakresem $2X_m = 10$ V wygeneruje szum kwantyzacji o wartości średniokwadratowej

$$\sigma_e = \frac{X_m 2^{-B}}{\sqrt{12}} = \frac{(10/2) \cdot 2^{-7}}{\sqrt{12}} \cong 11.3 \text{ mV}$$

W tym przypadku przepływność bitowa wynosi

$$(B+1)F_p = 8 \cdot 8 \cdot 10^3 = 64 \text{ kbity/s}$$

a zakres dynamiczny

$$\text{SNR} \cong 6B - 1.25 = 6 \cdot 5 - 1.24 = 40.75 \text{ [dB]}$$

Uwaga! Obliczenia SNR są prawdziwe jedynie wtedy, gdy starannie dopasujemy zakres sygnału wejściowego do pełnego zakresu konwertera A/D, a liczba bitów kodu binarnego próbek sygnału jest wystarczająca, by spełnione były założenia addytywnego statystycznego modelu szumu kwantowania.

Dalsze ilustracje: patrz literatura w bibliotece WETI:

A.V. Oppenheim and R.W. Schafer with J.R. Buck: Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall 1999, p. 4.8.2 i 4.8.3, str. 192-197.