prof. dr hab. inż. Bożena Kostek (p. 731) LAF/KSM WETI

Wprowadzenie do Sztucznej Inteligencji

WYKŁAD

Logika rozmyta (1h)

Wprowadzenie

- Klasyczne wnioskowanie oparte na dwuwartościowej logice Arystotelesa oraz na klasycznej definicji zbioru według Cantora nie zawsze są adekwatne do badanych problemów. Szczególnie ma to miejsce w projektowaniu i eksploatacji systemów sterowania, gdy uzyskuje się z mierników i sensorów rzeczywiste parametry, obarczone błędami lub niejednoznaczne, nie dające się zinterpretować, które ponadto wskazywać mogą na sprzeczne decyzje (https://www.mimuw.edu.pl/~szczuka/ls/logiki-wielowartosciowe.pdf)
- Dlatego zachodzi potrzeba wykorzystania innych narzędzi niż obliczenia komputerowe o wysokiej precyzji i logika *prawda-fałsz* (logika klasyczna - dwuwartościowa), reprezentowane przez 0 i 1.
- Można w tym celu wykorzystać logikę wielowartościową, tj. liczby z przedziału [0,1], których graniczne wartości są oznaczone odpowiednio jako fałsz i prawda.

Wprowadzenie

- W klasycznej teorii zbiorów stopień przynależności danego elementu do zbioru można określić za pomocą jednej z dwóch wartości: 0 – gdy element nie należy do danego zbioru i 1 – gdy element należy do danego zbioru. Wówczas trudno jest jednoznacznie określić stopień przynależności każdego parametru rzeczywistego, gdy jego wartość pochodzi z ciągłej dziedziny zmienności i ulokowana jest w pobliżu granicy zbiorów [Łachwa];
- Zapis reguły (IF – THEN) jest formą reprezentacji wiedzy.

Wprowadzenie

Można zaobserwować kilka **rodzajów niepewności,** m.in.:

- **Niepewność stochastyczna:**

  np. rzut kostką, wypadek, ryzyko w ubezpieczeniach (zastosowanie ma rachunek prawdopodobieństwa) – celem jest stwierdzanie, jakie jest prawdopodobieństwo zajścia ściśle określonego zdarzenia.

- **Niepewność pomiarowa:**

  – celem jest stwierdzenie poziomu istotności uzyskanej wartości, estymacja wartości, ocena jakości pomiaru.

Wprowadzenie

Można zaobserwować kilka **rodzajów niepewności,** m.in.:

- **Niepewność informacyjna:**

Ocena wiarygodności kredytobiorcy (zastosowanie ma drążenie danych, ang. *data mining*) – celem jest poszukanie zależności między atrybutami i decyzjami.

- **Niepewność lingwistyczna:**

Wyrażenie wartości w sposób słowny: mały, szybki, zimno, ciepło, drogo, tanio (zastosowane ma logika rozmyta) – celem jest wnioskowanie i otrzymywanie ścisłego wyniku z wejściowych danych nieprecyzyjnych, podawanych w sposób słowny (często danych liczbowych, ale zamienianych na opis słowny).

Wprowadzenie

- Na potrzeby niepewności lingwistycznej, tj. dla przetwarzania danych lingwistycznych prof. Lofti Zadeh w 1965 roku zaproponował podejście nazywane logiką rozmytą (ang. *fuzzy logic* - FL) lub liczeniem „na słowach" (ang. *computing with words*) [Zadeh]. Może być ona traktowana jako rozwinięcie dwuwartościowej logiki do postaci logiki wielowartościowej, gdyż istnieje prosta redukcja logiki rozmytej do logiki *prawda-fałsz*.
- przetwarzanie wyrażeń języka naturalnego"

Wprowadzenie

- Na potrzeby niepewności lingwistycznej, tj. dla przetwarzania danych lingwistycznych prof. Lofti Zadeh w 1965 roku zaproponował podejście nazywane logiką rozmytą (ang. *fuzzy logic* - FL) lub liczeniem „na słowach” (ang. *computing with words*) [Zadeh]. Może być ona traktowana jako rozwinięcie dwuwartościowej logiki do postaci logiki wielowartościowej, gdyż istnieje prosta redukcja logiki rozmytej do logiki *prawda-fałsz*.
- przetwarzanie wyrażeń języka naturalnego”

https://en.wikipedia.org/wiki/Lotfi_A._Zadeh

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

- Przed wprowadzeniem pojęcia zbioru rozmytego, przypomnieć należy sposób określania zbioru tradycyjnego. Niech przykładowy zbiór zawiera wszystkie osoby niskie, np. o wzroście poniżej 150 cm. Definicja tak rozumianego zbioru jest następująca:

$$\textbf{niski} = \{x \mid \mathit{wzrost}(x) < 150\}$$

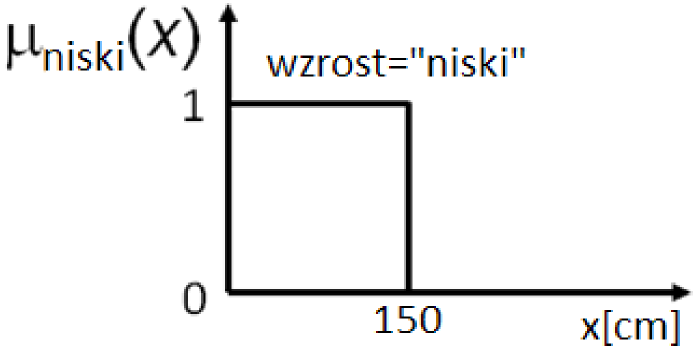
gdzie, *x* oznacza osobę, a *wzrost*() oznacza funkcję pomiaru wzrostu, która zwraca wartości w cm.

- Funkcja przynależności do tego zbioru klasycznego jest określona jako odwzorowanie, przypisujące każdej wartości wejściowej *x* wartości wynikowe 1 lub 0:

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

$$\mu_{\text{niski}}(x) = \begin{cases} 1: \text{wzrost}(x) < 150 \\ 0: \text{wzrost}(x) \geq 150 \end{cases}$$

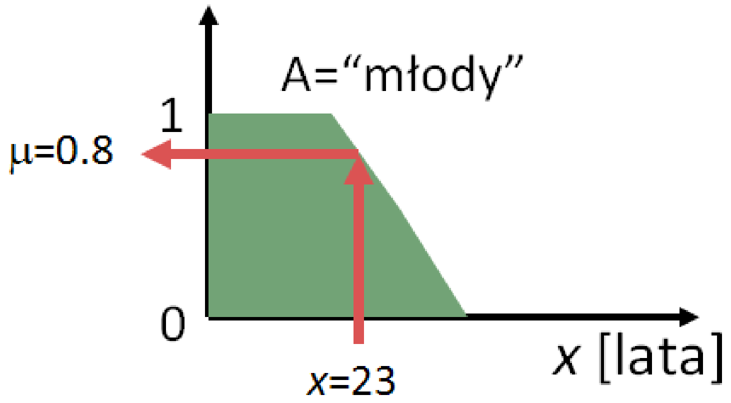
Wykreślona na osi funkcja przynależności nazywana jest funkcją charakterystyczną



Przykład funkcji charakterystycznej zbioru klasycznego – zawsze posiada ona kształt prostokątny, przyjmuje wyłącznie wartości 0 lub 1 (odpowiednio: nie należy, należy do zbioru)

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

Dla zbioru rozmytego – przyjąć może ona dowolną wartość pomiędzy 0 a 1



Przykładowa funkcja przynależności dla zmiennej lingwistycznej „wiek", wartości lingwistycznej „młody". Osoba o liczbie lat równej *x* przynależy częściowo do zbioru. Stopień przynależności określa wartość funkcji

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

W teorii zbiorów rozmytych **element może należeć częściowo** do pewnego zbioru. Stopień przynależności elementów do danego zbioru rozmytego opisuje funkcja przynależności (ang. *membership function*):

$$\mu_A\colon\ U \to [0, 1]$$

Zapis ten oznacza, że funkcja obiektom ze zbioru U przyporządkowuje liczby z przedziału od 0 do 1.

Zmienna lingwistyczna to nazwa cechy (wzrost, temperatura, waga, itd.),

Wartość lingwistyczna (etykieta) to nazwa określająca w sposób intuicyjny wartości (niski, wysoki, zimno, ciepło, itp.)

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

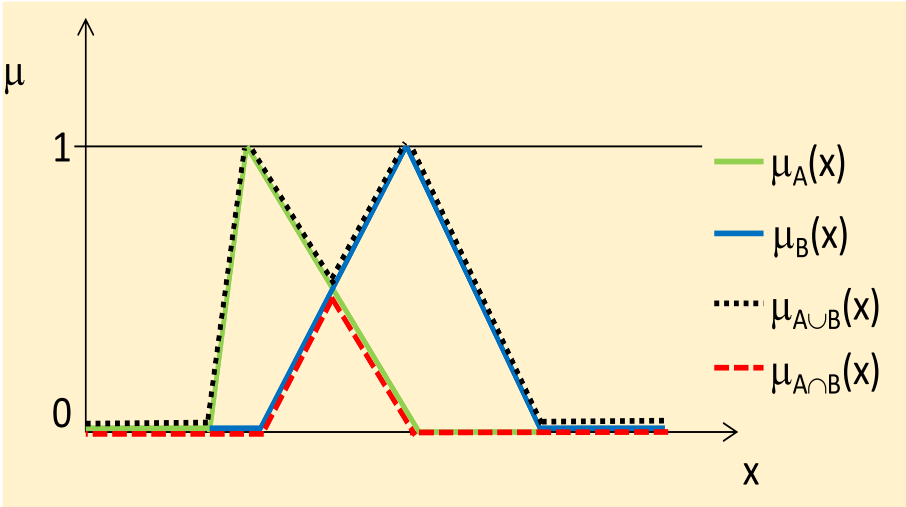
Podstawowe działania na zbiorach rozmytych

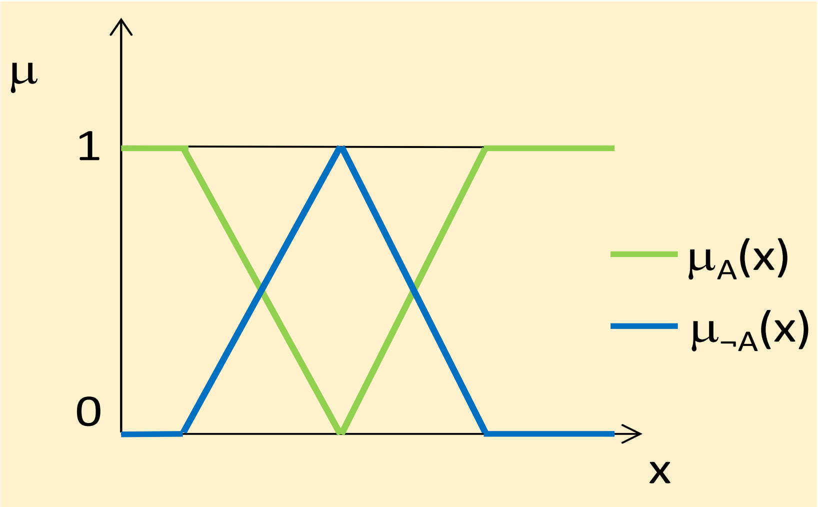
Z punktu widzenia przetwarzania rozmytego najważniejsze są operacje na zbiorach rozmytych, które są analogią do działań na zbiorach (część wspólna, suma, dopełnienie) i do działań logicznych (AND, OR, NOT, czyli iloczyn, suma i negacja)

- iloczyn zbiorów rozmytych A i B na tym samym uniwersum U, to zbiór rozmyty $A \cap B$ określony funkcją przynależności
- suma zbiorów rozmytych A i B na tym samym uniwersum U, to zbiór rozmyty $A \cup B$ określony funkcją przynależności
- dopełnienie zbioru rozmytego A na uniwersum U, to zbiór rozmyty $\neg A$

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

Podstawowe działania na zbiorach rozmytych

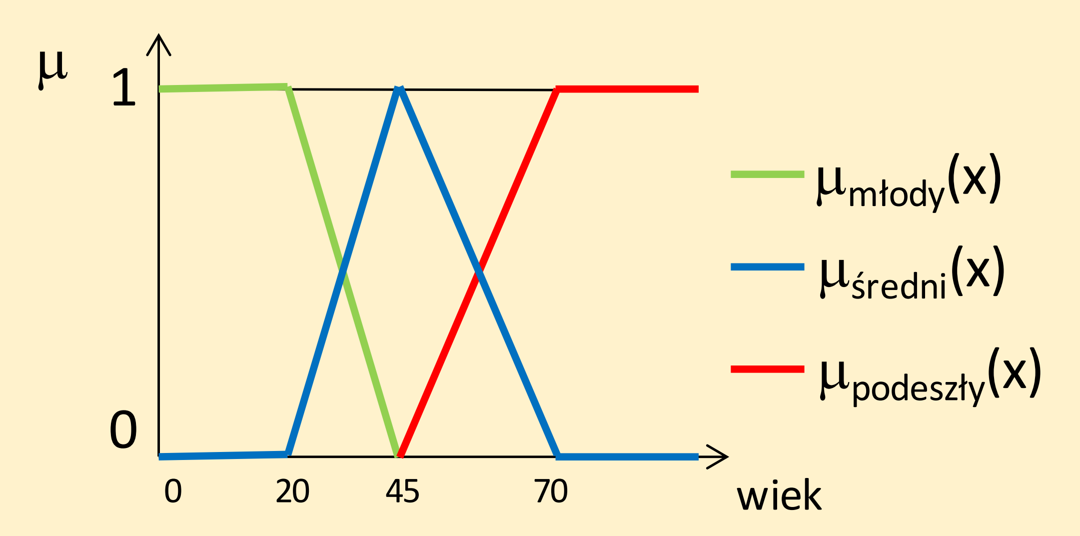




Graficzna reprezentacja działań na zbiorach: a) iloczyn i suma, b) dopełnienie

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

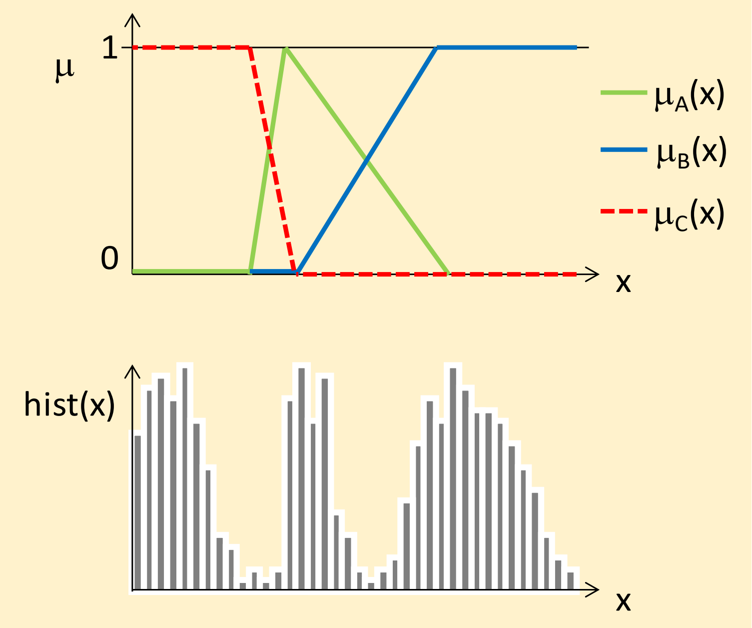
Podstawowe działania na zbiorach rozmytych



Funkcje przynależności wartości lingwistycznych zmiennej *wiek*

Zbiór klasyczny a zbiór rozmyty

Podstawowe działania na zbiorach rozmytych



Przykładowy histogram i proponowane funkcje przynależności uzyskane na podstawie analizy statystycznej

System rozmyty

- rozmywanie (*fuzzification*)
- interpretacja i ocena reguł (*inferrence; rule evaluation*)
- precyzowanie, wyostrzanie (*defuzzification*)- np. metodą wyznaczania „środka ciężkości” (ang. *Centre of Gravity*, COG)

System logiki rozmytej oczekuje na wejściu parametrów w postaci liczb rzeczywistych i zwraca wyniki również w postaci liczb rzeczywistych (ang. *crisp value*), które nazywa się „ostrymi”, w przeciwieństwie do rozmytych

System rozmyty

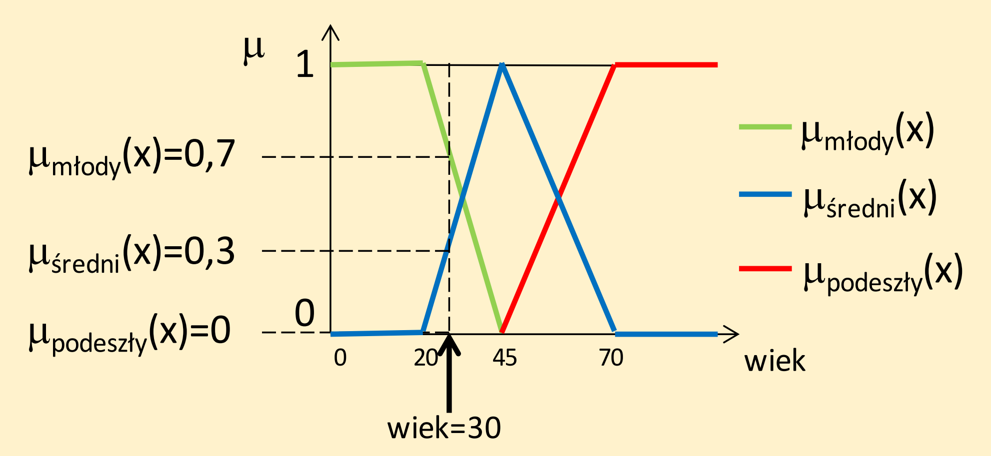
- **rozmywanie (*fuzzification*)** – przekształcenie wejścia systemu w postaci liczb na wartości rozmyte, tj. polega na wyznaczeniu wartości lingwistycznych w oparciu o wartości zwracane przez funkcje przynależności dla danej zmiennej wejściowej
- interpretacja i ocena reguł (*inferrence; rule evaluation*)

Typowa reguła w logice rozmytej ma postać wyrażenia złożonego z poprzednia (przesłanek reguły) i następnika (decyzji):

IF przesłanka 1 **AND** przesłanka 2 **AND** ... **AND** przesłanka *n* **THEN** decyzja

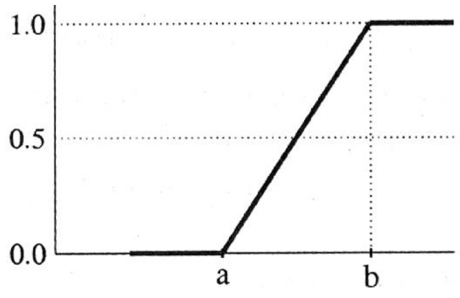
System rozmyty

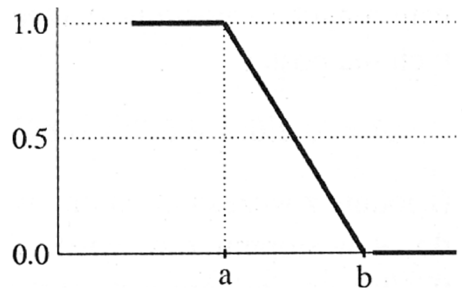
Rozmywanie [Driankov et al.][Łachwa] polega na wyznaczeniu wartości lingwistycznych w oparciu o wartości zwracane przez **funkcje przynależności** dla danej zmiennej wejściowej

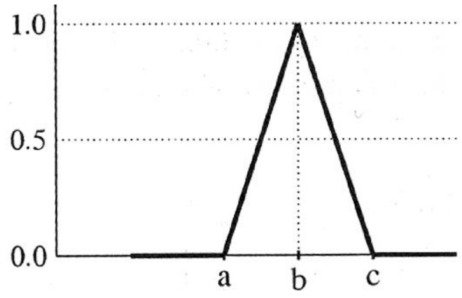


Graficzna interpretacja rozmywania. Wejściowa ostra wartość *wiek*=30 zamieniana jest na wartości rozmyte *młody* i *średni*

System rozmyty – rodzaje funkcji przynależności



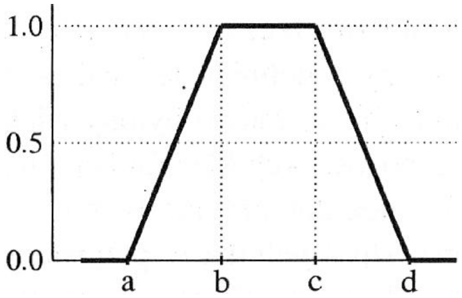


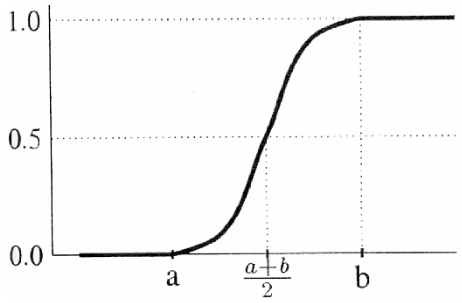


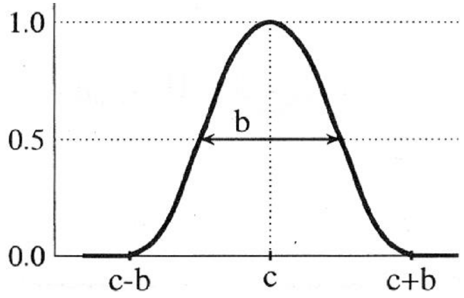
Funkcja klasy Γ

Funkcja klasy L

Funkcja klasy Λ (trójkątna)







Funkcja klasy Π (trapezowa)

Funkcja klasy s

Funkcja klasy π

System rozmyty

- **interpretacja i ocena reguł (*inferrence; rule evaluation*)**
- Interpretacja reguł przebiega w dwóch fazach. Najpierw oblicza się **moc reguły** (ang. *rule evaluation*), czyli określa jak silna jest decyzja uzyskana przez obliczenie reguły dla danych wartości wejściowych. W tym celu w miejsce przesłanek podstawia się wartości odpowiadających im zmiennych lingwistycznych:

  IF przesłanka 1 **AND** przesłanka 2 **AND** ... **AND** przesłanka n **THEN** decyzja
- Ponieważ w logice rozmytej operacja AND równoważna jest funkcji minimum, dlatego moc reguły oblicza się jako minimum wartości przesłanek, występujących w tej regule.
- Jeżeli moc reguły jest zerowa, to reguła ta jest uznawana za nieaktywną.

System rozmyty

interpretacja i ocena reguł (*inferrence; rule evaluation*)

- Wyznaczona moc reguły interpretowana jest jako stopień przynależności wynikowej wartości decyzji (rozmytej lingwistycznej wartości z dziedziny decyzji)

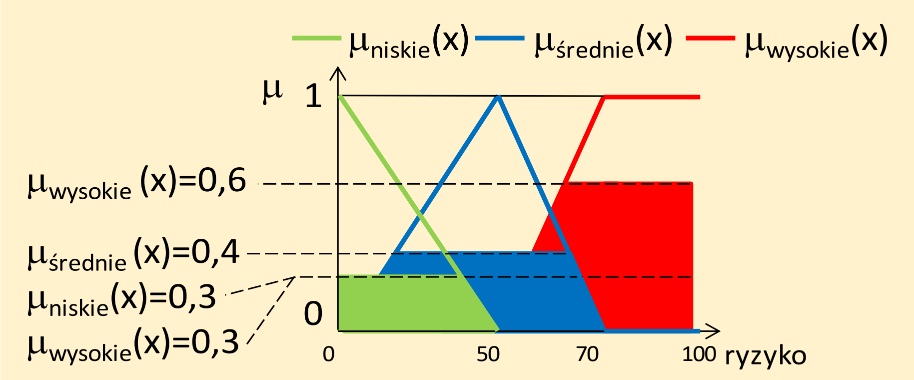
- Po wyznaczeniu mocy wszystkich reguł występujących w systemie FL następuje faza agregacji reguł (ang. *rule aggregation*), która polega na sumowaniu wszystkich wynikowych zbiorów rozmytych, reprezentujących poszczególne reguły. Decyzje z wielu reguł tworzą zdanie logiczne o postaci:

Decyzja = dec 1 OR dec 2 OR … OR dec n

System rozmyty

interpretacja i ocena reguł (*inferrence; rule evaluation*)

- Ponieważ zdanie to zawiera warunki OR, to do obliczenia końcowej decyzji stosuje się funkcję minimum (sumę logiczną)



Graficzna interpretacja procesu agregacji reguł – wynikiem jest pole powierzchni pod trzema kolorowymi trapezami

System rozmyty

- **precyzowanie, wyostrzanie (*defuzzification*)- np. metodą wyznaczania „środka ciężkości” (ang. *Centre of Gravity*, COG)**

Dla wynikowego zbioru rozmytego przeprowadza się wyostrzanie (defuzyfikację). Jest to operacja odwrotna do rozmywania, której zadaniem jest zamiana rozmytego wyniku na liczbę rzeczywistą, ostrą.

Wyostrzanie uwzględnia kształt funkcji przynależności wynikowego zbioru decyzji rozmytej. Dlatego do określenia na postawie kształtu (pola, krzywizny) jednej liczby rzeczywistej, stosuje się podejścia analizujące funkcję lub pole pod funkcją i zwracające jedną wartość ostrą.

System rozmyty

- **precyzowanie, wyostrzanie (*defuzzification*)- np. metodą wyznaczania „środka ciężkości” (ang. *Centre of Gravity*, COG)**

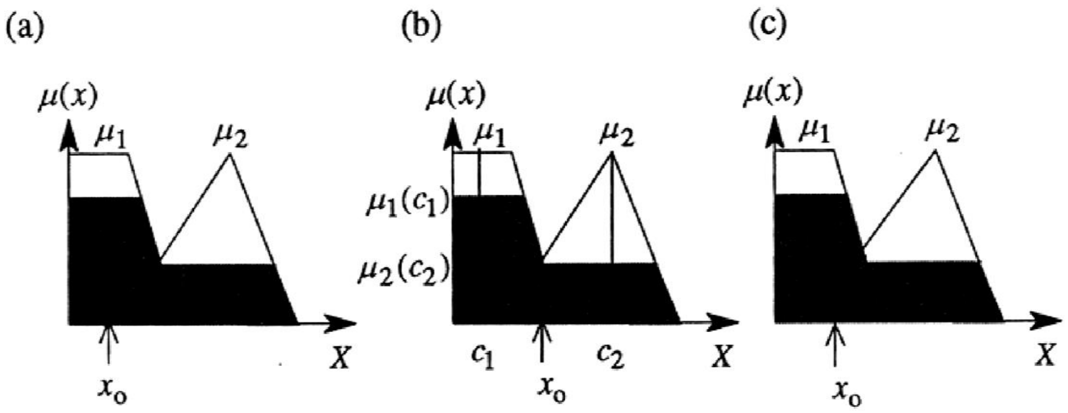
Wyostrzanie można przeprowadzić na kilka sposobów:

- metoda środka przedziału o największej wartości funkcji przynależności (ang. *Mean of Maximum*);
- metoda środka maksimum (ang. *Middle of Maxima*);
- metoda centrowego środka ciężkości (ang. *Center Average*);
- metoda wysokości (ang. *Height Method*);
- metoda wyznaczania środka ciężkości (ang. *Center of Gravity*), itd.

System rozmyty

- **precyzowanie, wyostrzanie (*defuzzification*)- np. metodą wyznaczania „środka ciężkości” (ang. *Centre of Gravity*, COG)**

Metoda wyznaczania środka ciężkości (ang. *center of gravity*).



Graficzna interpretacja metod wyostrzania: a) metoda środka przedziału o największej wartości funkcji przynależności, b) metoda centrowego środka ciężkości, c) metoda wyznaczania środka ciężkości [A. Czyżewski]

System rozmyty – Model Mamdaniego

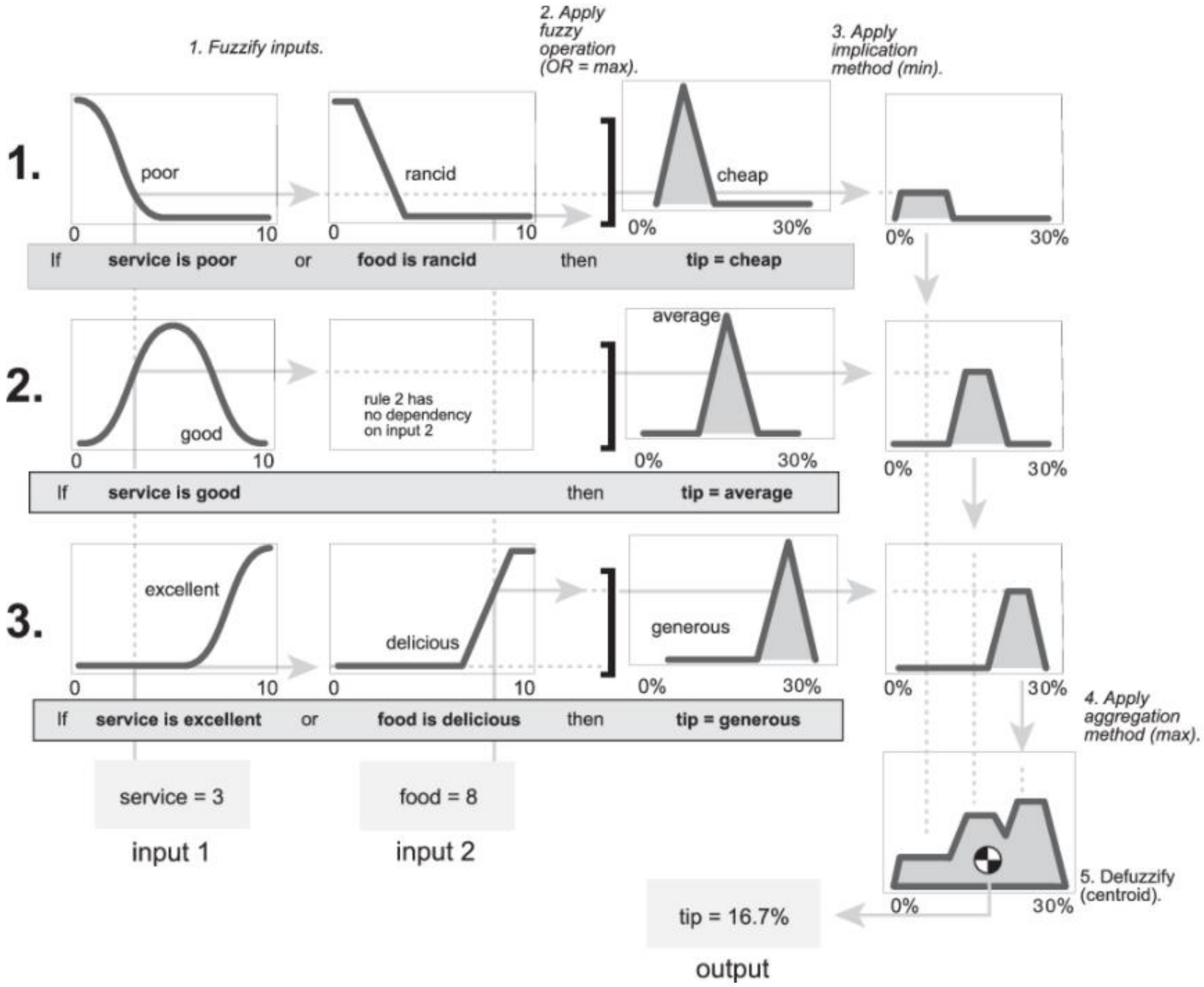
Metoda Mamdaniego ma następujące cechy:

- Metoda intuicyjna;
- Dobrze dostosowana do danych wprowadzanych przez człowieka;
- Łatwo interpretowalna baza reguł;
- Powszechnie akceptowalna.

System rozmyty – Model Mamdaniego

- Metoda Mamdaniego jest przydatna, gdy liczba zmiennych jest mała. W przeciwnym razie napotka się następujące trudności:
- Liczba reguł rośnie wykładniczo wraz z liczbą zmiennych w przesłance. Im więcej reguł, tym trudniej ocenić ich dopasowanie do problemu.
- Jeżeli liczba zmiennych w przesłance jest zbyt duża, trudno będzie zrozumieć relacje między przesłankami i konsekwencjami.
- Istnieją inne metody wnioskowania takie jak metoda Sugeno, która inaczej oblicza implikację.

System rozmyty – Model Mamdaniego



https://ww2.mathworks.cn/help/fuzzy/types-of-fuzzy-inference-systems.html

System rozmyty - Model Takagi-Sugeno-Kanga

We wnioskach reguł występują nie zbiory rozmyte, ale **funkcje zmiennych wejściowych**. Są to najczęściej funkcje **liniowe**, więc każda reguła modelu opisuje jeden płaski (liniowy) segment powierzchni modelu.

TSK- baza wiedzy składajaca się n reguł, każda zawierajaca m przesłanek [Li et al.]:
R_1: *IF* x_1 *is* A_{11} *and …and* x_m *is* A_{m1} *THEN* $y=f_1(x_1,\ldots,x_m)=\beta_{01}+\beta_{11}x1+\ldots+\beta_{m1}x_m$,
…

R_n: *IF* x_1 *is* A_{1n} *and …and* x_m *is* A_{mn} *THEN* $y=f_n(x_1,\ldots,x_m)=\beta_{0n}+\beta_{1n}x_1+\ldots+\beta_{mn}x_m$,

gdzie:

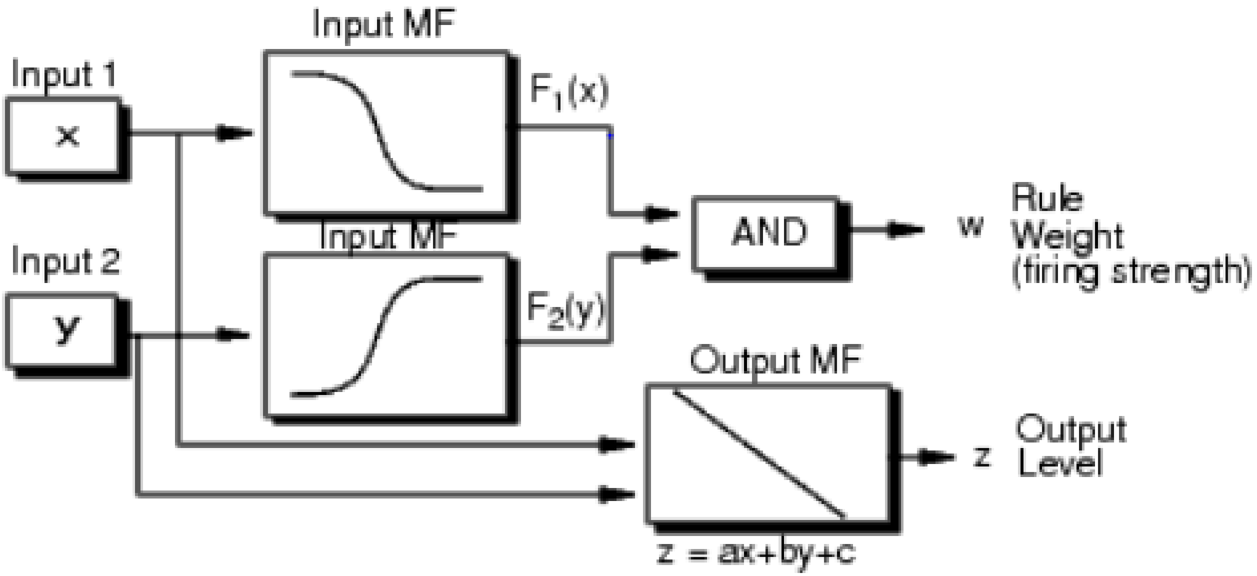
β_{or} and β_{sr}, ($r\in\{1,2,\ldots,n\}$ and $s\in\{1,2,\ldots,m\}$) są stałymi parametrami funkcji liniowych of the linear decyzji reguły, przy wektorze wejściowym $A_1^*,\ldots,A_m^*$

System rozmyty - Model Takagi-Sugeno-Kanga

Cechy modelu TSK:

- Wydajność obliczeniowa;
- Metoda dobrze współpracująca z technikami liniowymi, takimi jak sterowanie PID;
- Metoda dobrze współpracująca z technikami optymalizacyjnymi i adaptacyjnymi;
- Gwarantuje ciągłość powierzchni wyjściowej modelu;
- Dobrze nadaje się do analizy matematycznej.

System rozmyty - Model Takagi-Sugeno-Kanga



https://ww2.mathworks.cn/help/fuzzy/types-of-fuzzy-inference-systems.html

System rozmyty

Zalety:

- Stabilność – małe różnice na wejściu generują małe różnice na wyjściu;
- Łatwość wyrażenia wiedzy w języku naturalnym;
- Zastosowanie badań eksperymentalnych - podstawą reguł są wyniki numeryczne eksperymentów, określające zarówno reguły wnioskowania, jak i funkcje przynależności;
- Interpolacja – możliwość obliczenia wyjścia dla danych wejściowych spoza zakresu początkowo przewidzianego;
- Możliwość weryfikacji reguł przez eksperta, ale też zbudowana na wiedzy eksperckiej.

Materiały

W prezentacji wykorzystano następujące materiały:

- Calegari R, Ciatto G, Denti E, Omicini A. Logic-Based Technologies for Intelligent Systems: State of the Art and Perspectives. Information. 2020; 11(3):167. https://doi.org/10.3390/info11030167
- Czyżewski A., Dźwięk cyfrowy. Podstawy teoretyczne, technologia, zastosowania, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa, 1998.
- Driankov D., Hellendoom H., Reinfrank M., Wprowadzenie do sterowania rozmytego, WNT, Warszawa, 1996
- Gavalec M, Němcová Z, Plavka J. Strong Tolerance and Strong Universality of Interval Eigenvectors in a Max-Łukasiewicz Algebra. Mathematics. 2020; 8(9):1504. https://doi.org/10.3390/math8091504
- Kołodziejczyk J., Podstawy sztucznej inteligencji, wykład 4, Logika rozmyta, 2011.
- Kostek B., Szczuko P., Sztuczna inteligencja w medycynie, Skrypt do wykładu, Politechnika Gdańska, Wydział ETI, 2014.

Materiały

W prezentacji wykorzystano następujące materiały:

- Li, J., Yang, L., Qu, Y. et al. An extended Takagi–Sugeno–Kang inference system (TSK+) with fuzzy interpolation and its rule base generation. Soft Comput 22, 3155–3170 (2018). https://doi.org/10.1007/s00500-017-2925-8
- Kosko B., Fuzzy Engineering, Prentice-Hall, 1997.
- Łachwa A., Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł I decyzji, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa, 2001.
- Mendel J.M., Fuzzy Logic Systems for Engineering: A Tutorial, IEEE, 1995.
- Piotrowski B., Logiki wielowartościowe, https://www.mimuw.edu.pl/~szczuka/ls/logiki-wielowartosciowe.pdf
- https://ww2.mathworks.cn/help/fuzzy/types-of-fuzzy-inference-systems.html
- Zadeh L.A., Fuzzy Sets, Information and control, pp. 338-353, 1965.
- Zadeh L. A., Fuzzy logic = computing with words, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 4, pp. 103-111, 1996.

Dziękuję

Bożena Kostek